上海音乐学院音乐科技与艺术系列讲义

音乐科技与艺术
数学导引

蒋鲁敏 编著

音乐工程系
2006. 4

目录

第一章 音律中的数学 1

§1 音律体系 1
§2 等平均律，音分和沙伐 1
§3 毕达哥拉斯音阶 3
§4 纯律 5
§5 中庸全音律和不规则音律 7

第二章 音乐中的对称 10

§1 现实世界中对称美 10
§2 群论一研究对称的数学 12
1. 群及群的同构 12
2. 用群研究平面图形的对称性 15
§3 音乐与群 18
1. 时钟数学和 12 音系 18
2. 音列的变换群 20
3. 乐曲中的对称 21
4. 中非五弦竖琴曲规律解密 26
§4 置换群及其应用 27
1. 置换群 27
2. 应用举例一多变的教堂钟声 28
3. 12 调音乐 30

第三章 数字音乐中的数学 35

§1 数字化声音信号 35
§2 取样、还原和减少失真方法的数学原理 37
§3 取样速率和 Nyquist 定理 38
§4 Z 变换 42
§5 离散 Fourier 变换 44
§6 快速 Fourier 变换 46

第一章　音律中的数学

§1 音律体系
§2 等平均律，音分和沙伐
§3 毕达哥拉斯音阶
§4 纯律
§5 中庸全音律和不规则音律

§1 音律体系

音乐的物理基础是声学，但同时也受人的听觉心理的制约。音乐中每个音的主要特征如音高、音色、时值、强度都可以用声学中相应的物理量来描述，声学物理可以帮助我们理解音乐理论，寻找最佳的音响效果等等。在音乐实践中，声学物理的理论研究往往还要根据听觉心理规律作必要的补充或调整。本章以声学物理为基础，结合听觉心理的基本规律介绍各种音律体系。

音乐艺术具有时间性，即乐曲的演奏、歌唱家的演唱，都是瞬时的，我们现在不可能再听到巴赫和莫扎特演奏的乐曲。因此，音乐作品的创作、流传和再现，都需要明确地规定各个音的音高、各个音之间的关系。这样就出现了各种音律系统。

根据巴布（Barbour）的分类方法，在一个八度音程范围内的音律系统分以下五类：毕达哥拉斯音律、纯律、中庸全音律、等平均音律和不规则音律。各种音律体系虽然形式不同、应用范围和时代不同，但是各种音律体系都有共同的声学和听觉心理学的基础。

§2 等平均律，音分和沙伐

声学心理规律显示：

1. 人的听觉对声音频率比的敏感程度要比声音频率本身高低的敏感程度高；
2. 当两个乐音的振动频比等于 2 时，人耳感觉是同音名，只不过第一个音比第二个音高一个八度。

等平均律规定将一个八度音程按相同的频率比分为 12 等份，每等份称为 1 个半音。记半音对应的频率比为 x，并设以 C 音（称为基音，也可以取其他音作基音）作为比较的基础。从 C 到下一个高八度的 C 之间（含两端的 C）有 13 个音，这些音的频率与 C 音频率的比依次为

$$1, x, x^2, x^3, \cdots, x^{12}$$

因为高八度的 C 的频率是第一个 C 的频率的两倍，得到方程：

$$x^{12} = 2$$

可解得 $x=2^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{2}\approx 1.0595$。这样从 C 到下一个高八度的 C 之间 13 个音的频率与 C 音频率的比依次为

$$1,2^{\frac{1}{12}},2^{\frac{2}{12}},2^{\frac{3}{12}},\cdots,2^{\frac{12}{12}}=2$$

在音乐理论中，通常把音高的单位称为音分，规定一个八度的音程为 1200 音分。在等平均律音阶中的 1 个半音对应 100 音分，简记为 100c。若规定基音 C 的音高为 0c，某个音比基音 C 高 k 个半音，则该音的音高为 $k\times 100$ c，其频率与基音的频率比为 x^k。这样，一个音用音分表示的音高 z 和该音的频率与基音频率比 $y=x^k$ 之间的关系可表示为

$$z=100\times\log_x y$$

此处 $x=2^{\frac{1}{12}}$。利用对数换底公式

$$\log_x y=\frac{\lg y}{\lg x}=\frac{\lg y}{\lg 2^{\frac{1}{12}}}=\frac{\lg y}{\frac{1}{12}\lg 2}=\frac{12\lg y}{\lg 2}$$

z 和 y 之间的关系可改写为

$$z=\frac{1200\lg y}{\lg 2}\approx 3986.3\lg y$$

为应用方便，我们也将由音分 z 求频率比 y 的公式列出备查：

$$y=2^{\frac{z}{1200}}$$

在法国，用沙伐（Savart，纪念法国物理学家 Félix Savart)来度量音程；规定频率比 10:1 为 1000 沙伐。这样，与基音的频率比为 y 的音用沙伐表示的音高为 $1000\lg y$。八度音程为 $1000\lg 2\approx 301.03$ 沙伐。

由八度音程为 1200c 或 $1000\lg 2$ 沙伐，可得同一个音的音高用音分 z 与沙伐 s 的关系为

$$1\text{ 沙伐}=\frac{1200}{1000\lg 2}=\frac{6}{5\lg 2}\approx 3.98631\text{ 音分}$$

练习与思考

1. 通常规定基音 C 的频率为 256Hz。

（1）. 同八度的其他各音（A、B、D、E、F、G）的频率分别是多少？

（2）. 音高为 360c、1400c 的音的频率各为多少？这些音与基音的频率比分别是多少？

2. 两个音相差 150c，能否求出它们的频率？能否求出它们的频率比？试说明理由。

3. 两个音的频率比为 1：1.56，它们的音高差用音分表示是多少？

4. 用沙伐作音高的单位，有什么长处和短处？

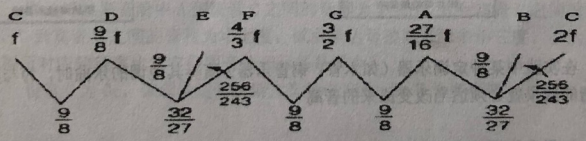
§3 毕达哥拉斯音阶

等平均律在西方音乐的实践中得到普遍应用是在十七世纪以后，至今只有三百多年的历史。最早的基于声音振动机制设立音阶要追溯到公元前五世纪古希腊的毕达哥拉斯时代。毕达哥拉斯发现，频率比为 3:2 的音特别协和，他相信只用 2：1 和 3：2 的频率比可以构造出所有的乐音。

毕达哥拉斯音律体系可以用下面的“五度相生律”说明其定律过程：以 C 音为基础，与其频率比为 3：2 的是 G 音，两音之间的音程即为纯五度；在 G 音上方的纯五度音与 C 音的比为 9：4，超出了八度的范围，降低八度后即和 C 音的频率比为 9:8 的音即 D 音；在 D 音上方的纯五度音，其和 C 音的频率比为 27:16，即为 A 音；在 A 音上方的纯五度音与 C 音的比为 81：32，超出了八度的范围，降低八度后即和 C 音的频率比为 81:64 的音即 E 音；在 E 音上方的纯五度音，其和 C 音的频率比为 243:128，即为 B 音；最后， C 音下方的纯五度音，其频率与和 C 音的频率比为 2:3，不在以 C 音开始的八度音程范围内，提高八度后，频率与和 C 音的频率比为 4:3，即为 F 音。至此生成了七声音阶中的七个音。如果按音的高低重新排列，并将其频率与和 C 音的频率比（表示为 $\frac{3^m}{2^n}$ 形式）同时列出，就得到下面的表：

音名	C	D	E	F	G	A	B	C
频　率	1	1.1250	1.2656	1.3333	1.5000	1.6875	1.8984	2
比 $\frac{3^m}{2^n}$	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{2}{1}$
n	0	3	6	-2	1	4	7	0
m	0	2	4	-1	1	3	5	0

如果我们把两相邻音的频率比（较高频率比较低频率）列出，得到下面的图：

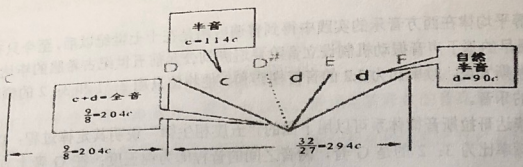


图中记 C 音的频率为 f，各音的频率用 f 的倍数在音名下标出，相邻两音的频率比用折线下的数字表示。在毕达哥拉斯音律体系中的全音对应的频率比为 $\frac{9}{8}$，半音对应的频率比为 $\frac{256}{243}$，八度音程包括 5 个全音、2 个半音。有时称毕达哥拉斯音阶为自然音阶，其中的半音称为自然半音。

注意到

$$\left(\frac{256}{243}\right)^2=\frac{2^{16}}{3^{10}}\neq\frac{9}{8}=\frac{3^2}{2^3},$$

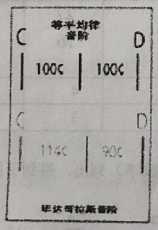
因而在毕达哥拉斯音阶中 1 个全音不等于 2 个半音。下图用音分表示其间的差别。



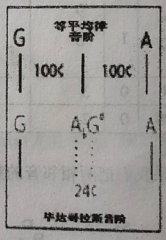
在图中，毕达哥拉斯音阶中的全音近似等于 204 音分，自然半音约为 90 音分，两者之差称为 1 个半音。注意毕达哥拉斯音阶中半音与自然半音是不同的音程。半音与自然半音之差，即$114c-90c=24c$，称为 1 个**自然音差**，也称毕达哥拉斯音差。自然音差对应的频率比为半音对应的频率比与自然半音对应的频率比之商：

$$\left(\frac{9}{8}\div\frac{256}{243}\right)\div\left(\frac{256}{243}\right)=\frac{3^{12}}{2^{19}}\approx 1.0136$$

和等平均律音阶不同，毕达哥拉斯音阶中相差 1 个全音的两个音，低音升高 1 个半音与高音降低 1 个半音是不同的音，如下图所示：

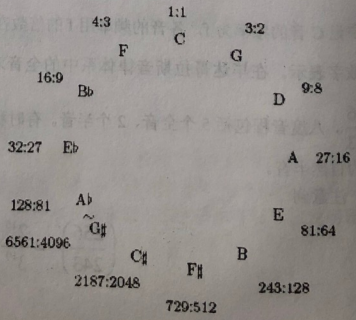


半音与自然半音音程的不同，需要用不同的记号表示增高G音1个半音和降低A音1个半音所得到的不同音



在实践中某种定调乐器（如木管、铜管乐器）演奏其他调的乐曲时，为与其他乐器达到和谐的效果就必须适当改变原来的音高

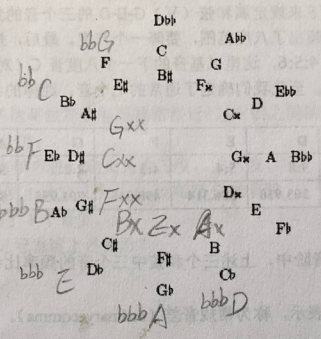
如果我们回到生成毕达哥拉斯音阶的“五度相生律”，并向两个方向（升高纯五度和降低纯五度）继续下去（见右图），我们会得到相当于等平均律的 12 个音。在两个方向的交会处（等音），图中的 G#和 Ab 处，两个音的频率比为$\frac{3^{12}}{2^{19}}$，相差 1 个自然音差。



实践中如果 1 个自然音差的差

别可以忽略时（例如不会引起听觉上的异常感觉），这两个音就可以看作是同一个音，并记为 Ab 音或 G#音。但如果这个差别不可忽略时，就需要用适当的对它们加以调整。

如果我们继续下去，将得到一条如下图所示的螺旋线，其中 x 表示##（重升）。在该图中，内圈的音与紧邻的外圈的音都高 1 个自然音差。这样的图我们称之为五度生成图。



应该指出，根据我国古书《管子·地员篇》记载，在公元前四世纪到公元前三世纪，我国就用“三分损益律”生成各音。用现代语言表述，就是用分数三分之二与四分之三来生成各音。这与上述“五度相生律”是同一种系统。

练习与思考

1. 写出满足下列条件的音名：

（1）. 比 F 低一个毕达哥拉斯音差；

（2）. 比 B 高两个毕达哥拉斯音差；

（3）. 比 B 低两个毕达哥拉斯音差。

2. 毕达哥拉斯音阶中 A 到高音 C 之间的音程为小三度，E 到高音 C 之间的音程为小六度，D 到高音 C 之间的音程为小七度。试求毕达哥拉斯音阶中小三度、小六度、小七度音程所对应的频率比。它们用音分表示各是多少？

3. 设音 C 为 0c，试求毕达哥拉斯大音阶中 Ebb、Fx 各为多少音分。

§4 纯律

纯律大约最早出现在公元前 1 世纪（Didymus）到公元 2 世纪（Ptolemy）之间。纯律依据以下事实建立音阶：

1. 人的耳朵对声音频率比的敏感程度要比声音频率本身的敏感程度高；

2. 频率比为 2 的两个音是同一个音名，只不过高一个八度；

3. 当两个音的频率比可以表示为两个小整数之比时，听觉上这两个音比较和谐；频率比表示为越是小的整数之比，听觉上两个音越是和谐。例如将频率比为 3:4 的两个音，与频率比为 4:7 的两个音比较，听觉上前面的两个音要更和谐些。

因此，纯律与毕达哥拉斯音律一样，在八度音程中也包括尽可能多的频率比为 3:2 的音。两者不同之处在于：纯律要求三个主要的三和弦更悦耳，即用更小的整数比来规定三和弦Ⅰ、Ⅳ、Ⅴ。在实践中，纯律有多种不同的模式，但都是利用小整数的频率比来规定各音。这里我们以 C 音为基音，说明一种纯律中的各音形成的过程。

先由 C 按 3:2 的频率比定 G 音。规定主和弦（Ⅰ）C-E-G 的三个音的频率比为 4:5:6，由此可定 E 音。接下来规定属和弦（Ⅴ）G-B-D 的三个音的频率比也为 4:5:6，由此可定 B 音，在定 D 音时，超出了八度范围，要降一个八度。最后，规定下属和弦（Ⅳ）F-A-C 的三个音的频率比也为 4:5:6，这里以基音的下一个八度音 C（对应的频率比为 2）为基准，由此可定 F 音和 C 音。至此我们确定了通常的七个音，纯律的各音的频率比和音分见下表：

音	C	D	E	F	G	A	B	C
频率比	1:1	9:8	5:4	4:3	3:2	5:3	15:8	2:1
音分	0.000	203.910	386.314	498.045	701.955	884.359	1088.269	1200.000

在毕达哥拉斯音阶中，上述三个和弦中三个音的频率比都是 $4:\frac{81}{16}:6$。两者的差别可用比值 $\frac{81}{16}:5=\frac{81}{80}$ 表示，称为常规音差（ordinary comma）。通常所谓音差，指的就是常规音差。常规音差约等于 21.5 音分。

下面引进音的 Eitz 记号，这些记号可以直观地表示如何由毕达哥拉斯音阶调整得到新的音阶。

将毕达哥拉斯音阶中各个音 C、D、E、F、G、A、B 分别改用 C^0、D^0、E^0、F^0、G^0、A^0、B^0。如果将 D^0 音增高 1 个音差的音记为 D^1，D^1 的频率和基音 C 的频率比为 $\frac{9}{8}\times\frac{81}{80}=\frac{729}{640}$。同样 D^2 由 D^0 音增高 2 个音差得到，D^2 的频率和基音 C 的频率比为 $\frac{9}{8}\times\left(\frac{81}{80}\right)^2$；$D^{-1}$ 由 D^0 音降低 1 个音差得到，D^{-1} 的频率和基音 C 的频率比为 $\frac{9}{8}\div\frac{81}{80}=\frac{10}{9}$。用类似的方法规定 $D^{\frac{1}{2}}$ 或 $D^{-\frac{1}{4}}$ 的含意。$D^{\frac{1}{2}}$ 的频率和基音 C 的频率比为 $\frac{9}{8}\times\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{2}}$，$D^{-\frac{1}{4}}$ 的频率和基音 C 的频率比为 $\frac{9}{8}\div\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{4}}$。

用这样的记号，纯律中的 E 音可用记号 E^{-1} 表示：因为该音与基音的频率比为 $\frac{5}{4}$，可用毕达哥拉斯音阶的中的 E 音（与基音的频率比为 $\frac{81}{64}$）降低 1 个音差得到：$\frac{81}{64}\div\frac{81}{80}=\frac{80}{64}=\frac{5}{4}$。用 Eitz 记号可以将纯律的各音表示为

$$C^0-D^0-E^{-1}-F^0-G^0-A^{-1}-B^{-1}-C^0$$

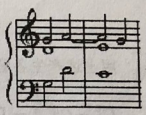
上式表示了纯律音阶和毕达哥拉斯音阶的关系。

我国在 1957 年出土了一套春秋时代的编钟，用这套编钟可演奏的各种调式，说明当时在实践中从其定律方式来看接近于西方的纯律。

练习与思考

1. 常规音差与毕达哥拉斯音差是非常接近的，它们之间的音程称为 1 个 schisma。试求 1 个 schisma 的音分值。

✱2. 如果把右列的和声进行定义为大三度、大六度、纯四度和纯五度，试说明由此定义的从 G 到高音 G 的音阶恰比课文中的各音增高了 1 个音差。



3. 如何用 Eitz 记号表述上述音阶？

§5 中庸全音律和不规则音律

中庸全音律用分摊的方法调整毕达哥拉斯音阶或纯律音阶，以使得原先相差若干音差的不同音合而为一个音。一种最常见的中庸全音律调整的方法是：调整各音间的音程使大三度更协和些。该方法规定大三度对应的频率比为 5:4，而其他音由等值插值确定。这样，C-D-E、F-G-A、G-A-B 都以相同的方法确定：例如大三度音程 C-D-E 中，先规定 E 音和 C 音的频率比为 5:4， D 音和 C 音、E 音和 D 音的频率比是相同的，等于 $\sqrt{5}:2$，即规定全音对应的频率比为 $\frac{\sqrt{5}}{2}:1$。中庸全音律中的半音所对应的频率比 x 由下列方法确定：由于一个八度（对应的频率比为 2）包括 5 个全音和 2 个半音，x 应满足下列方程：

$$x^2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^5=2$$

可以解出

$$x=\frac{8}{5\sqrt[4]{5}}$$

如此规定的中庸全音律七音的频率比和音高如下表：

音	C	D	E	F	G	A	B	C
频率比	1:1	$\sqrt{5}:2$	5:4	$2:5^{\frac{1}{4}}$	$5^{\frac{1}{4}}:1$	$5^{\frac{3}{4}}:2$	$5^{\frac{1}{4}}:4$	2:1
音分	0.000	193.157	386.314	503.422	696.579	889.735	1082.892	1200.000

表中显示，此处五度音程不再能表示为两个整数之比。

下面我们仔细研究中庸全音律中五度音程与毕达哥拉斯音律中五度音程的差别。毕达哥拉斯音律中五度音程对应的频率比为 $3:2=\frac{3}{2}$，中庸全音律中五度音程对应的频率比为 $\frac{2}{\sqrt[4]{5}}$，$\sqrt[4]{5}$

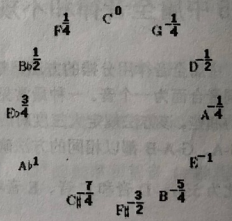
两者的差别可用比值 $\frac{3}{2}\div\frac{2}{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[4]{\frac{81}{80}}$ 表示，该比值恰为四分之一个音差。因而中庸全音律也可表述为：将毕达哥拉斯音阶中的各纯五度调低四分之一个音差，以使大三度对应的频率比总保持为 5:4，就得到中庸全音律音阶。用前面介绍的 Eitz 记号，中庸全音律中的七音可表示为：

$$C^0-D^{-\frac{1}{2}}-E^{-1}-F^{\frac{1}{4}}-G^{-\frac{1}{4}}-A^{-\frac{3}{4}}-B^{-\frac{5}{4}}-C^0$$

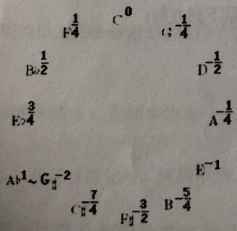
用上述产生各音相同的方法，可以得到通常 12 个音中其余的音。以 Eitz 记号可表示为

$$C^0-C\#^{-\frac{7}{4}}-D^{-\frac{1}{2}}-Eb^{\frac{3}{4}}-E^{-1}-F^{\frac{1}{4}}-F\#^{-\frac{3}{2}}-G^{-\frac{1}{4}}-Ab^{1}-A^{-\frac{3}{4}}-Bb^{\frac{1}{2}}-B^{-\frac{5}{4}}-C^0$$

上述音列也可以用比较简洁的方法得到。因为中庸全音律中五度音程比毕达哥拉斯音阶中的纯五度低四分之一个音差，我们可以先用五度相生律生成毕达哥拉斯音阶各音，再按每五度音程降低四分之一个音差生成中庸全音律中各个音。在五度生成图中，由 C 音开始，顺时针方向依五度相生律生成生成 G~C#，每个音比前一个差五度的音降低四分之一个音差；逆时针方向生成 F ~Ab，每个音比前一个差五度的音增高四分之一个音差。



值得注意的是，同毕达哥拉斯音阶的情况一样，以这种方法可以继续生成中庸全音阶中其他的音，并在两个方向有交会点 Ab 和 G#。按该方法得到的螺线如左。从图中可以看出，Ab 比 G#低 1 个自然音差、又高 3 个常规音差：自然音差来自在毕达哥拉斯音阶中 Ab 和 G#的音程差， 3 个常规音差产生于中庸全音律的生成的过程。这样，Ab 音与 G#音的频率比为



$$\left(\frac{81}{80}\right)^3\div\frac{2^{19}}{3^{12}}=\frac{128}{125}$$

约为 41.059 音分。这两个音的差别对人的听觉不可忽视。在中庸全音律中 Ab 音与 C#音不协和的五度，称为五度狼音（wolf）音程，需要用适当的方法加以处理。

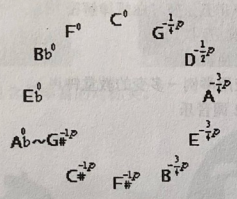
上述由毕达哥拉斯音阶生成中庸全音阶中的各音时，使用的是每五度降低四分之一个音差的方法。历史上也有人使用每五度降低六分之一（或其他分数值）个音差的方法得到不同

形式的音阶。

不规则音律体系试图改变中庸全音律中的音程以解决出现的五度狼音问题。典型的一个例子是维克迈斯特（Werckmeister）经常使用的调音方法。用 Eitz 的记号，其音阶可表示为：

$$C^0 - C\#^{-1p} - D^{-\frac{1}{2}p} - Eb^0 - E^{-\frac{3}{4}p} - F^0 - F\#^{-1p} - G^{-\frac{1}{4}p} - G\#^{-1p} - A^{-\frac{3}{4}p} - Bb^0 - B^{-\frac{3}{4}p} - C^0$$

上标中的 p 表示毕达哥拉斯音差。在该音阶中，毕达哥拉斯音差均匀地分配到 C-G-D-A 和 B-F#之间的音程上，每五度降低四分之一个毕达哥拉斯音差。上述音列可用五度生成图表示如下：



注意此时 Ab 和 G#是完全相同的音。

练习与思考

1. 试用每五度降低五分之一个音差的方法生成各音，并用五度生成图表示。这样得到的音阶（也是另一种中庸全音律）在 Ab 音与 G#音之间的音程是多少？试将此音阶和课文中的中庸全音阶作对比。

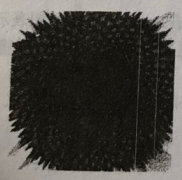
2. 试计算课文中的不规则音律中各音的频率与基音的频率比，并按定义 C 音为 0c，以音分表示各音音高。

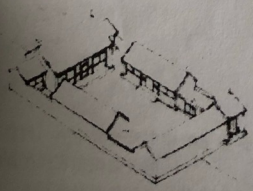
第二章　音乐中的对称

§1　现实世界中对称美
§2　群论－研究对称的数学
　　1.　群及群的同构
　　2.　用群研究平面图形的对称性
§3　音乐与群
　　1.　时钟数学和 12 音系
　　2.　音列的变换群
　　3.　乐曲中的对称
　　4.　中非五弦竖琴曲规律解密
§4　置换群及其应用
　　1.置换群
　　2.应用举例－多变的教堂钟声
　　3.12 调音乐

§1 现实世界中对称美

自然界中到处可见对称的形式，例如植物的叶、昆虫的触角、眼、足，鸟的翅膀，鱼的胸鳍、腹鳍，哺乳动物的眼、耳、足等。对称的形态在视觉上有自然、安定、均匀、协调、整齐、典雅、庄重、完美的朴素美感，符合人们的视觉习惯。



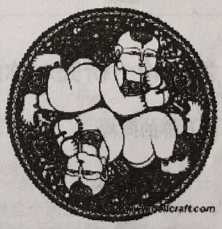


在科学、艺术、文学、建筑、工程、哲学等几乎人类文明的各个领域都能看到对称美的明显烙印。例如在各种建筑物的布局、结构、外形以及内部装饰上，人对美的追求之中对称随处可见。

35

又如我国的民间剪纸艺术包含了丰富的对称美。

10



11

1

在各种文字语言和文学作品中，美也常和对称相联系。例如英文的 26 个字母，分别包含了左右对称、上下对称、旋转对称等：

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

而我国古代许多脍炙人口的诗歌、对联中就很更讲究对仗、呼应等。例如王维的词：《田园乐》

桃红复合宿雨，柳绿更带朝烟，花落家童未扫，莺啼山客犹眠。

民间常用的对联：

天增岁月人增寿　春满人间福满门

又如回文诗，可以正读、逆读，意境优美，情趣各异。如唐朝薛涛《春》：

花朵几枝柔倍砌，柳丝千缕细摇风。霞明半岭西斜日，月上孤村一树松。

可逆读为：

松树一村孤上月，日斜西岭半明霞。风摇细缕千丝柳，砌倍柔枝几朵花。

又如：明王元美的《菩萨蛮　暮春》

白杨长映孤山碧，春暮伤别人。雁归迷塞远，楼倚独深愁。

将每句逆读后变成：

碧山孤映长杨白，人别伤暮春。远塞迷归雁，愁深独倚楼。

音乐追求美，对称也常常在乐曲的不同层次上出现。本章我们介绍研究对称的数学—群论，并分析音乐中的若干对称现象。

练习与思考

举若干在不同领域内对称现象的例子。

§2 群论—研究对称的数学

1. 群及群的同构

任意两个自然数相加总是一个自然数，我们把这种性质称为“在自然数集合内加法可行”。同样，由于任意两个自然数相乘也总是自然数，因而在自然数集合内乘法也是可行的。但是两个自然数相减不一定再是自然数，我们说“在自然数集合内减法不可行”。同样，在自然数集合内除法也不可行。

由于减法是加法的逆运算，我们看到，在一个集合内一种运算可行，其逆运算不一定可行。在整数集合内，加法可行，其逆运算减法也可行；但是虽然在整数集合内乘法可行，其逆运算除法却不可行。当把数的集合扩大为有理数集合，则加法、乘法和它们的逆运算（作除法时规定除数不等于零）都可行。我们把集合和其中的运算抽象化为群的概念。

设有一个集合 G，我们用 a，b，…… 表示其中的元素。在集合 G 内定义了一种运算 $\circ$ 是指：对 G 内的任意两个元素 x 和 y，$x\circ y$ 仍然是 G 中的元素，亦即在 G 中运算 $\circ$ 是可行的。如果集合 G 和运算 $\circ$ 还满足以下四个性质，我们就称 G 为一个群：

1. G 不是一个空集，即 G 内至少含有一个元素（空集事实上没有什么好研究的）。
2. 结合律成立：即对任何元素 a，b，c，恒有 $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$。
3. 有单位元素存在，即 G 中有一个元素 e 有如下的性质：对任何 $a\in G$，恒有

$$e\circ a=a,\qquad a\circ e=a$$

4. 逆运算可行，即对任何 $a\in G$，，在 G 中有一个元素 a^{-1}，称为 a 的逆元素，使下面等式成立：

$$a^{-1}\circ a=e,\qquad a\circ a^{-1}=e$$

0在G内封闭

整数加法群

正数乘法群

操作动作集合

{-1, 1} 关于乘法成群

mod 7 加法群

$a^*\circ a=e$　$a^*\circ a=e$　交换律对逆元成立.

但 $a\times b\neq b\times a$

↓

不一定.

$a\circ(a^*\circ b)=b$.

$=(a\circ a^*)\circ b=e\circ b=b$

运算 ∘ 在 G 内封闭：对任意 $a\in G$，$b\in G$，总有 $a\circ b\in G$.

群的概念就是对许多具体的集合和它们特殊的运算研究的基础上抽象出来的。在十九世纪的最后十年，数学家认识到，对许多不相联系的系统抽出它们共同的内容进行综合的研究，可以取得事半功倍的效果。人们所熟知的许多对称性的现象，也可借助于群论以揭示规律，深入研究。我们用一些例子来说明群的概念。

[例 1] 整数关于加法成群。此时每个整数的逆元素是其相反数，单位元 $e=0$。

[例 2] 非零的正有理数关于乘法成群。此时每个正数的逆元素是其倒数，单位元 $e=1$。

[例 3] 我们把在队列操练中的几个动作用记号表示出来：

不动记为 R_0，向右转记为 R_{90}，向左转记为 R_{-90}，向后转记为 R_{180}。记这些动作组成的集合为 M。在 M 内规定两个动作的 ∘ 运算为它们合起来的结果，例如 $R_{90}\circ R_{-90}$ 表示先向右转再向左转，等于是集合中的元素 R_0。由于任意两个动作的结果总是这四个动作之一，所以 M 关于运算 ∘ 总是可行的。进一步，M 还关于这种运算 ∘ 成群：其中的单位元 $e=R_0$，各元素的逆元素如下表。

元素	R_0	R_{90}	R_{-90}	R_{180}
逆元素	R_0	R_{-90}	R_{90}	R_{180}

[例 4] 由 −1 和 1 组成的集合 $M=\{-1, 1\}$ 关于乘法成群：其单位元为 $e=1$，因为 $(-1)\times(-1)=1$，$1\times1=1$，每个元素的逆元素为自己。

[例 5] 由 “非”和“是”组成的集合 $P=\{$非，是$\}$，关于下面规定的乘法×成群：

是×是 = 是;
是×非 = 非;
非×是 = 非;
非×非 = 是。

可以验证：集合 P 和关于这样规定的乘法满足所有群的要求：其单位元为 e = 是，因为非× 非 = 是，是×是 = 是，每个元素的逆元素为自己。

如果我们把此例和例 4 加以对比，把此处的“是”看作 1，“非”看作 −1，把这里规定的乘法等同于数的乘法，则两个例子中的集合和它们的运算以及运算规律都是一样的。由此我们还可以由数的乘法规律：

奇数个 −1 之积等于 −1，偶数个 −1 之积等于 1;

得到通常逻辑学中的规律：

奇数次否定之结果等于否定，偶数次否定之结果等于肯定。

例 4 和例 5 虽然实际背景不同，但是在上述对应关系下，集合 M 和 P 不但元素之间一一对应，而且在 M 的元素之间的运算结果和对应的 P 元素之间的运算结果对应，即群 M 和 P 有相同的结构，从群的观点来看 M 和 P 并无差别。在群论中这样的两个群称为“**同构**”。

[例 6] 我们在朴克牌的几种花色之间规定一种乘法×运算如下表所示，

克莱茵旋转群，(同构)

	♣	♠	♥	♦
♣	♣	♠	♥	♦
♠	♠	♣	♦	♥
♥	♥	♦	♣	♠
♦	♦	♥	♠	♣

这里列表示第一个因子，行表示第二个因子，表中的花色表示运算的结果。例如由表的第二行第三列表示以下的算式：♠×♥=♦ 。

事实上，上表可用左图来表示。

朴克牌的四种花色在这种乘法×运算下构成一个群。

在一般抽象的水平上，数学家研究了群的结构，表示及分类。这些研究在实践中也得到了应用。

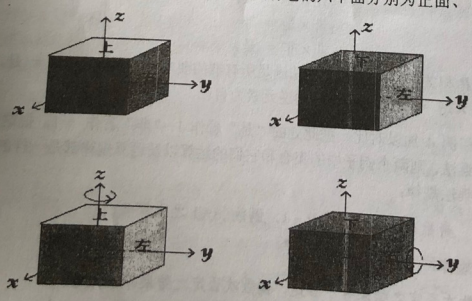
练习与思考

1. 举两个群的例子，说明元素什么，运算是什么，单位元是什么，并验证它们满足群的要求。

2. 试说明所有有理数关于加法成群，不包含 0 的所有有理数关于乘法成群。

3. 试说明把一个平面图形旋转 0°、120°、240° 三个动作也成一个群。

4. 观察下面的正六面体。如图，我们称它的六个面分别为正面、背面、左面、右面、上面和下面，并过其中心作空间坐标系。将该六面体分别绕 x 轴、y 轴、z 轴旋转 180^0 得到的六面体位置如下图所示。如果我们记不动为 R_0，将该六面体绕 x 轴、y 轴、z 轴 180^0 旋转分别记为 R_x、R_y、R_z，规定两种旋转的乘积为这两种旋转合成的结果，说明



验证 Mod(12) 成加法群.

集合 G, {[1],[2],[3],[4],[5],[6]} ~~[2],[3]~~ ·(mod(7)) 成乘法群.

（1）旋转所成的集合$\{R_0, R_x, R_y, \mathrm{R}_z\}$关于这种乘法构成群。

（2）如果把R_0看作♣，R_x、R_y、R_z分别看作♠、♥、♦，说明在这种对应下，$\{R_0, R_x, R_y, \mathrm{R}_z\}$中的乘法恰与朴克牌花色的乘法对应。例如绕 x 轴旋转180^0再绕 y 轴旋转180^0等于绕 z 轴旋转180^0，即$R_x \circ R_y = R_z$；而对应的♠、♥的乘积恰为♦，♦对应的恰是R_z。

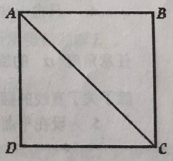
（3）说明在这种对应下，群$\{R_0, R_x, R_y, \mathrm{R}_z\}$和群{♣，♠，♥，♦}同构。

（4）想一想，研究空间图形旋转的关系与朴克牌花色之间的关系何者较简单？再想想群同构的意义。

2. 用群研究平面图形的对称性

群论有许多应用，这里我们介绍平面上的对称群和装饰花纹。

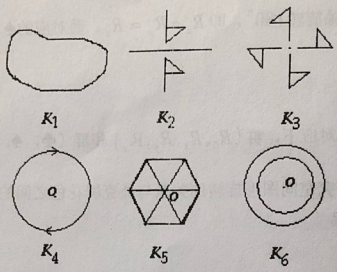
先讨论平面上的对称有限图形。所谓有限图形，是指整个图形可以用一个适当的正方形框起来的图形。有限图形的对称性可以用一个适当的“运动群”来刻划，这个“运动群”是由如下的运动组成：经过该运动后有限图形不变。例如，对一个正方形来说，绕中心（对角线交点）顺时针旋转 90° 后图形不改变，“绕中心顺时针旋转 90° ”就是使正方形不变的一个运动。此外，如果将正方形绕对角线翻折，图形也不变，所以“绕对角线翻折”也是使正方形不变的一个运动（如右图）。图中，绕对角线 AC 翻折后正方形图形不变，此时 B 点变为 D 点，D 点变为 B 点，线段 AB 变为线段 AD，线段 AD 变为线段 AB，线段 CB 变为线段 CD，线段 CD 变为线段 CB。有了一些使正方形不变的运动，还由此可以得到更多使正方形不变的运动。例如，绕中心顺时针旋转180° 可以看作绕中心顺时针旋转90^0两次，正方形图形也不改变，因而绕中心顺时针旋转180° 也是使图形不变的一个运动。



一般而言，前后接连作任何两个使图形不变的运动，结果图形也不变。把两个运动按这样方式的迭加可以看作两个运动的“乘积”，经过验证可以得到，使正方形图形不变的运动满足群的要求，这个群称为正方形的**对称群**。

我们可以把平面上任意一个有限图形看作一块均匀的板，于是使该图形不变的运动，也将保持其重心不变。由分析可知，这样的运动或是绕其重心的旋转，或是关于过其重心的某条直线的翻折。这样，任意有限平面图形的对称群仅由绕其重心的某些旋转及关于过重心的某些直线的翻折生成。

对平面有限图形对称群的研究和分类，发现只可能出现如下几种不同情形。



1. 仅由单位（恒等或不动）变换所组成的对称群 K_1。这是任意非对称形（图）的对称群。

2. 由单位变换及关于某一直线的翻折组成的对称群 K_2。

3. 只由一些旋转组成的对称群 K_3，但其中不含作任意小角度的旋转情况。

4. 只由一些旋转组成的对称群 K_4，但它含有作任意小角度的旋转。此时，作任意角度 α 的旋转仍属于群 K_4。这里在所有的运动或图形本身或是旋转，这就排除了关于直线的翻折。这是平面上有方向的圆或有方向的圆环的对称群。

5. 设在平面上有 n 条过重心 O 点的直线，这些直线分平面为 $2n$ 个等角。对称群 K_5 由关于这些直线的 n 种翻折以及绕 O 旋转 $\frac{360^0}{2n}$ 的倍角而生成。具有这样对称群的图形包括正 $2n$ 边形。

6. 由绕 O 点所有旋转及关于所有过 O 点的直线的翻折生成的对称群 K_6。无方向圆及无方向圆环可作为它的例子。

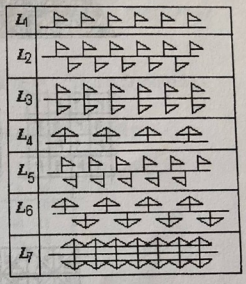
下面再看平面无限图形的情况。

找出平面无限图形的所有可能的对称群是较复杂的问题。现实中当平面上的一部分被一些非常小的图形盖满，和这些小图形相比较，平面的这一部分就像是无限大了。墙面上和印花布上用重复图形作成图案就是实例。这种图案的艺术（装饰艺术）自古就在很多民族广泛发展。在埃及金字塔和我国较早的文物上，就有这类图案的式样。

经过研究，平面上无限图形的 (离散) 对称群分为三类：

I. 在平面上有一点，它在所有变换下不动。这种类型的群包含平面有限图形中的群 K_1，K_2，K_3 和 K_4。

II. 在平面上不存在不动点，但存在一直线，它在所有变换下仍和自己重合。此直线称为群的轴。具有这种类型的对称群的装饰品伸展成“镶边”。具有群轴的对称的图形可以归结为以下七种形式：



1. 由一些平行移动生成的对称群 L_1，而这些平行移动的距离为某一固定线段 a 的倍数。

2. 由群 L_1 添加一个运动所得到群 L_2，这个运动是关于轴的翻折和作距离 $\frac{a}{2}$ 的平行移动的乘积。

3. 由群 L_1 添加一个关于群轴的翻折所得到的群 L_3。

4. 由群 L_1 添加一个关于垂直于群轴的直线的翻折所得到的群 L_4。

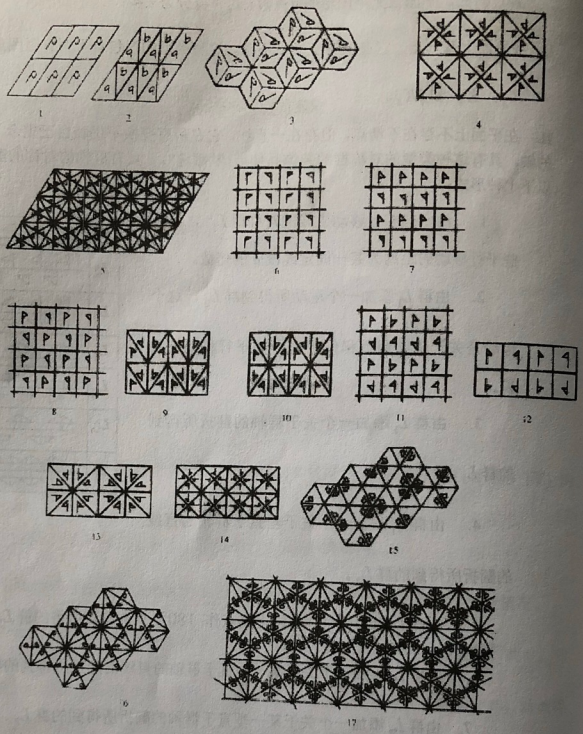
5. 由群 L_1 添加一个绕群轴上某点作 $180°$ 角的旋转所得的群 L_5。

6. 由群 L_2 添加一个关于某一垂直于群轴的直线的翻折所得到的群 L_6。

7. 由群 L_3 添加一个关于某一垂直于群轴的翻折所得到的群 L_7。

III. 在平面上既不存在点也不存在直线，使它们在所有的运动后和自身重合。这种型的群被称为平面费得洛夫群。它们是无限平面装饰品的对称群。它们共有 17 个：其中 5 个仅含第 I 种运动，12 个由第 I 种及第 II 种运动组成。下图的例子画出这 17 个平面费得洛夫群的装饰品图样。

值得指出的是，不懂得群论的工艺美术师实际上早就发现了具有所有可能对称群的装饰品，而群论所作的只是证明：除此以外，不再有其它的对称类型。



练习与思考

1. 矩形、菱形的对称群分别由哪些运动组成？
2. 试分析§1中各图中的事物具有怎样的对称群？
3. 试分析§1中各英文字母分别具有怎样的对称群？

§3. 音乐与群

1. 时钟算术和12音系

我们会计算上午9:00后过7小时是几点钟：先将9和7相加，9+7＝16，再除以12，

得余数 4，即上午 9:00 后过 7 小时是下午 4 点钟。这种算术称为时钟算术。计算星期三后的第 10 天是星期几也用相类似的方法，只不过使用的除数是 7 而不是 12。

一般地，取定某个正整数 m，在整数集合中可以定义 m 的同余类如下：规定所有除以 m 后余数相同的整数方法为一类。这样所有的整数被分成 m 类：除以 m 后余数为 0（即能被 m 整除）的整数组成第一类，除以 m 后余数为 1 的整数组成第二类，…，除以 m 后余数为 $m-1$ 的整数组成第 m 类。这些类依次记为 0（mod m），1（mod m），2（mod m），…，$m-1$（mod m）。类之间的相等关系我们用记号≡。例如

$$15 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 7),\quad 21 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 7)。$$

计算时间时我们使用 m=12 的同余类。例如，现在 9:00，过 21 个小时后是 $9+21 \equiv 30 \equiv 6$（mod 12），即 6 点钟。

在同余类中可以定义加法，例如在 $m=12$ 的同余类中，设 $a \equiv 5(\mathrm{mod}12)$，$b \equiv 8(\mathrm{mod}12)$，规定 $a+b \equiv 5+8 \equiv 1(\mathrm{mod}\,12)$。任何两类相加的情况可列表如下：

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

在音乐中，我们可以指定一个音与 0 对应，然后依次把等平均音阶中其他 11 个音与 1~11 之间的数相对应。例如将 C 音对应 0，我们简记为 C=0，对应关系为：

C	C♯	D	D♯	E	F	F♯	G	G♯	A	B♭	B
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

此时一个音提高 1 个半音即下面的变换：

$$\begin{pmatrix} \mathrm{C} & \mathrm{C\sharp} & \mathrm{D} & \mathrm{D\sharp} & \mathrm{E} & \mathrm{F} & \mathrm{F\sharp} & \mathrm{G} & \mathrm{G\sharp} & \mathrm{A} & \mathrm{B\flat} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C\sharp} & \mathrm{D} & \mathrm{D\sharp} & \mathrm{E} & \mathrm{F} & \mathrm{F\sharp} & \mathrm{G} & \mathrm{G\sharp} & \mathrm{A} & \mathrm{B\flat} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{pmatrix}$$

可用对应的数字加 1 表示。特别，B 音提高一个半音为 C 音，而 B 音对应的数字（11）加 1 为 12，由 $12 \equiv 0$（mod 12），恰为 C 音对应的同余类。这样，时钟算术反映了八度音的等价性质：在音乐中两个音同名，指的是两者可以相差若干八度；而在时钟算术中这两个音对应同一个（mod 12）的同余类。

时钟算术中的变换也有其意义，例如“将同余类加上 7”对应音的一种变换，即将音提高纯五度。同余类的加法此处对应于音的加法。

这里我们用（mod 12）的同余类或时钟算术只是和常用的 12 平均律中的音的个数是 12

个有关。如果我们对 31 个音的平均律音阶感兴趣，就应该使用（mod 31）同余类。31 音平均律音阶由于能较好地近似四分之一的音差，也引起人们较多的注意。

练习与思考

按课文中的数与音的对应表，完成下列各题：

1. 写出下面数列所对应的音列：

3 2 7 0 6 4

2. 写出下面音列所对应的数列：

B C A G F# D E

3. 写出上述两题中音列的增高 3 个半音和降低 5 个半音后的音列。

2. 音列的变换群

用时钟系统表示音，则音的序列可用数列表示。设有一个音列用数字表示为 5 0 8 。

[例 7]（1）把音列按从后到前排列的得到新的序列 8 0 5。我们称这变换音列的方法为逆行，记为 R。我们把保持原音列顺序不变也看作一个变换，记为 I_d 。由 R 和 I_d 组成的集合记为 $G_R=\{R, I_d\}$。在该集合内定义两种变换的乘法为它们接连作用的结果（和例 3 中的队列操练类似），则集合 G_R 成群。在该群中，每个元素的逆元素是自己，单位元为 I_d。

（2）把序列的每一个数用其逆元素代替得到新的序列 7 0 4。我们称这变换音列的方法为倒影，记为 I。由 R 和不变 I_d 组成的集合记为 $G_I=\{I, I_d\}$。在该集合内定义两种变换的乘法为它们接连作用的结果，则集合 G_I 成群。在该群中，每个元素的逆元素是自己，单位元为 I_d。

（3）把序列的每一个数用其逆元素代替、并按逆序排列，得到新的序列 4 0 7。我们称这变换音列的方法为逆行倒影，记为 C。由 C 和不变 I_d 组成的集合记为 $G_C=\{C, I_d\}$，在该集合内定义两种变换的乘法为它们接连作用的结果，则集合 G_C 成群。在该群中，每个元素的逆元素是自己，单位元为 I_d。

[例 8] 对例 7 所定义的 R、I、C，我们研究集合 G_P = {R，I，C，I_d }。同样定义两种变换的乘法×为它们接连作用的结果，例如 R×I=C：对任何一个音列先作倒影再作逆行变换，等于对该音列作逆行倒影。G_P 中各元素之间的乘法可列表表示如下：

×	I_d	R	C	I
I_d	I_d	R	C	I
R	R	I_d	I	C
C	C	I	I_d	R
I	I	C	R	I_d

在此乘法×下集合 G_P 成群。在该群中，每个元素的逆元素是自己，单位元为使音列不变的变换 I_d。

进一步研究还会发现，如果把 I_d 看作♣，R、I、C 分别看作♠、♥、♦，那么在这种对应下，G_P = {R，I，C，I_d } 中的乘法恰与朴克牌花色的乘法对应。并在这种对应下，群 G_P = {R，I，C，I_d } 和群 {♣，♠，♥，♦} 同构。这样，我们把比较复杂的音列的变换关系就化为了比较直观的朴克牌花色之间的关系。

在古典音乐中，许多音乐家在他们的作品中大量应用了音列的逆行、倒影、逆行倒影等手法，乐曲充分展示了对称美。

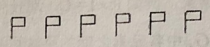
练习与思考

对上一小节练习与思考中的两个音列分别作逆行、倒影、逆行倒影变换。

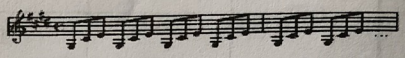
3. 乐曲中的对称

音乐追求美，因而对称也常显示为许多乐曲的特性。由于音乐随时间而变化，其对称通常表现为具有群轴（时间）的对称性，和平面无限图形的对称群相似。本节中我们利用前面介绍的群论知识来对照研究音乐中的一些对称现象。

最简单的位移对称如下图所示（L_1）：

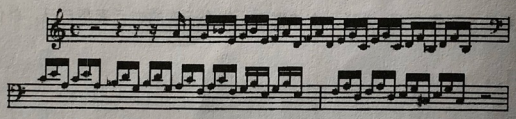


在群的理论中，这样的对称形成无限置换群，即我们把这种图形看作向左右两个方向都无限延展下去。在音乐中，上述对称通常表现为节奏、旋律或其他结构的重复。当然，任何实际的乐曲只可能有有限的长度，因而不可能真正是数学所指的无限的等距离位移的对称。音乐中出现的对称只能是数学意义下对称的一种近似。例如在贝多芬的《月光奏鸣曲》第一乐章的右手声部开头处中有如下一段：



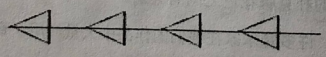
三连音重复了多次。

例如下面一段乐曲：

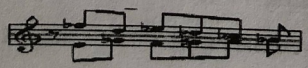


这是巴赫的《d 小调托卡塔与赋格曲》，BWV 565 管风琴曲中的一段。整段音乐基本上是向下的，近似地呈现出位移对称的特点，各三连音的音高构成以 d 旋律小调的下行音阶，并形成下行的调内分解三和弦。

又如数学中的反射对称可用下图示意（L_3）：



这种对称在音乐中就是音节或乐句的倒影。在贝拉·巴托克的《五度四重奏》中有如下一段：

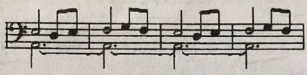


该段乐曲的水平反射轴是 B^b 音。

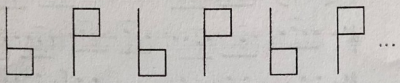
这样的对称关系还可能在更大的曲式结构上出现。例如在理查德·斯特劳斯的《埃莱克特拉》（1906－1908）中，虽然在各个具体音的选择上看不出对称起什么作用，但在调的选择上对称性却显现无遗。该歌剧以阿伽门农的 D 小调主题发展开始，接着是埃莱克特拉的 B 小三和弦和 F 小三和弦动机，两者关于 D 音对称。然后埃莱克特拉的独白、阿伽门农的 B^b

和克莉泰姆内斯特拉的 F#小三和弦动机，同样也关于 D 音对称。歌剧在 D 音两边就以这样的方式延续下去。最后以 C 大三和弦及最后的四小节以显著的大三度 E 结束。

乐音关于水平反射通常还与随时间位移结合起来。例如，在肖邦的《华尔兹》,Op.34 No2 左手部分以下面的乐段开始：

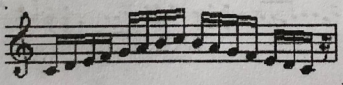


在这小段乐曲左手部中上面一个声部，前面的一小节倒置后就形成下一小节。因乐曲随时间而作位移，实际形成了位移反射，即一个位移再加上关于平行于位移方向的反射（L_2）。在群论中，可以用下图说明这种对称：

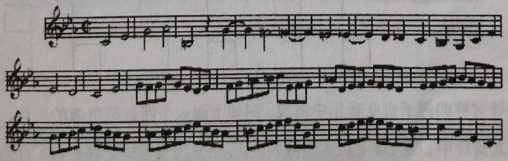


音乐中对称的重要性在于：乐曲严格的模式能使人预期乐曲的后面将出现的部分，但同时音乐也要求时时要打破固定的模式以避免使人感到单调乏味。成功的音乐就在于能在可期待性和意外的变化之间恰当地保持平衡。

除了关于水平轴反射的上述外，音乐中也有关于垂直轴（时间）反射的例子，即逆行。这时乐曲像一首正念反念都一样的回文诗。例如，在下面的音阶练习的上行与下行，形成了关于垂直轴的反射对称。

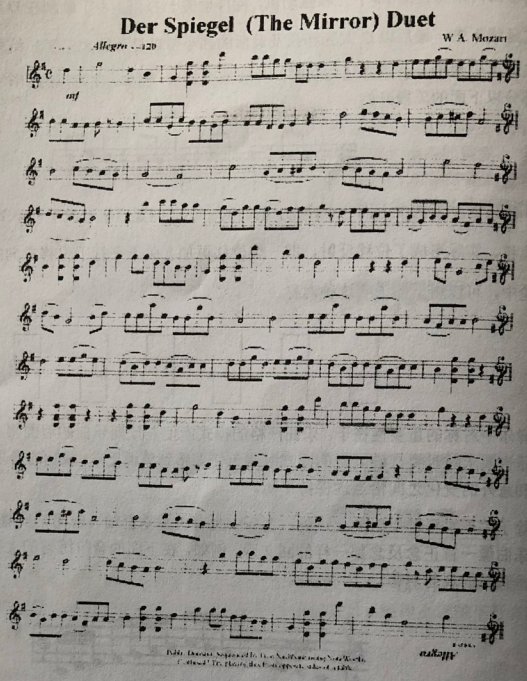


包含这种对称性的乐曲在音乐中被称为逆行卡农(Cancrizans)，表示同时向前和向后演奏乐曲。在巴赫的作品《音乐的奉献》(BWV 1079)中的第一个卡农是一个逆行卡农，由共计十八小节的“Frederick 的皇家主题”主题构成：

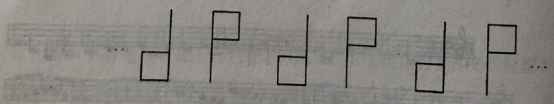


第一声部由前面第一小节开始向后演唱，而第二声部由最后一小节的结尾开始向前演唱。Bach 的作品中有许多类似对称的例子。

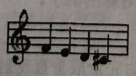
下面是莫扎特的一首表现为完全成垂直反射对称的作品：



具有群轴的对称中还有一种对称包含了位移及旋转（L_5），可以用下图示意：

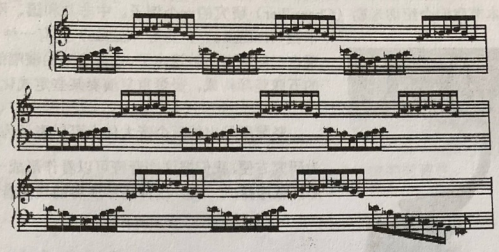


这种对称的例子也在音乐中出现。例如下面一个四音符组成的乐句，形成了完全的旋转对称，其旋转中心在D#上。在拉威尔（Ravel）的《西班牙狂想曲》(1907)中，该四音符乐句大量被重复。



下面的例子是莫扎特的钢琴作品《随想曲》，KV395 的中间一部分，其左右手形态也近似地表现出这种对称性。容易看出，先左手上行然后右手上行,再接右手下行加左手下行，

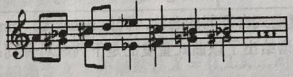
两手的形态趋向于这种对称形式。不仅如此，开头与结尾一上行一下行的布局，更体现了这一对称性。



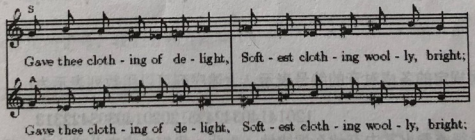
练习与思考

研究下面一些乐曲片段的对称性：

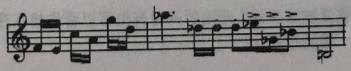
（1）Béla Bartók的 *Music for strings, percussion and celesta*



（2）John Tavener的 *lamb*（William Blake作词）



（3）Berg 的 *Lyric Suite*



4. 中非五弦竖琴曲规律解密

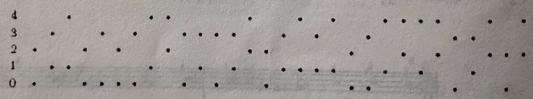
本节我们介绍切米勒（Chemillier）研究的一个例子。中非共和国、刚果以及苏丹的扎卡拉（Nzakara）和赞得（Zande）人有一种传统的庭院音乐，现在已经渐渐地被遗忘了。这种音乐由演唱的诗歌及为其伴奏的五弦竖琴构成。竖琴重复演奏某些定式化的乐曲。

竖琴所发出的五个音大体上可以表示为 C、D、E、G、B^b。为研究方便，我们把这些音符可以看作形成一个圈而不是通常那样依序排成一列。这样竖琴演奏的最高音和最低音相邻。

在演奏时，这些弦是成对弹拨的，而且所有成对的两个音在上述圈中不会相邻。这样成对的音在圈中必然有唯一的一个共同相邻的音，因而可用这个共同的邻音来记这一对音。所有的成对音可以列表如下：

编号	0	1	2	3	4
成对音	1	0	1	2	0
	4	2	3	4	3

竖琴演奏的重复曲式有不同的名称，例如 ngbàkià、 limanza 和 gitangi 等等。例如，记录某种 limanza 的乐谱给出了该曲式重复的是下列成对音列：



利用规定的各成对音的编号表示，上述序列可以用数列表示为：

1201414034242312020140303422313

初看很难看出其中有什么规律性。为此，我们先将它分成六个一组如下：

12 014140 342423 120201 403034 2313

因为序列是重复被演奏的，开始的两对音也可以看作排在序列末尾，这样上述数列可以写成完整的六个一组的形式：

014140 342423 120201 403034 231312

现在可以看出，每组数字是从上面一组数字在表示音的圈上向下移动两个位置得到。这就是常见的一种位移对称。

其实，这里也有旋转对称，这一点可以帮我们理解为什么要把开始时的最前面的两对音从前面移到最后面。如果完全颠倒数列的次序，就得到数列

213132 430304 102021 324243 041410

对该数列中每个数 x 变为 $2-x$（**mod 5**），就可以得到数列

014140 342423 120201 403034 231312，

这个数列和原先的数列相同。

练习与思考

找出下列在 ngbàkià（Chemillier 论文提供）重复曲式中所隐藏的对称性。

```
4     · ·     ·     ·
3   ·     · ·   ·
2 ·     ·     · ·
1     ·     ·     · ·
0 · ·     ·     ·
```

§4 置换群及其应用

1. 置换群

在有关群的理论中，置换群是一类重要的群。其重要性在于下面一个定理：

Cayley 定理　任何有限群都和某个置换群同构。

设有一个包含 n 个元素的集合 X，不妨就设 $X=\{1,2,3,\ldots,n\}$。所谓集合 X 的一个置换，就是指从 X 到 X 的一个对应关系，满足：不同的元素对应不同的元素。若记该对应关系为 f，$x\in X$ 对应的元素记为 $f(x)$，则当 $a\neq b,\ a\in X,\ b\in X$ 时 $f(a)\neq f(b)$。

置换有两种常用的记号，我们分别介绍如下。

设 $X=\{1,2,3,4,5\}$，一个置换 f 由下面各式定义：

$$f(1)=3,\ f(2)=5,\ f(3)=4,\ f(4)=1,\ f(5)=2$$

表示该置换的第一种形式是：

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

上面一行表示 $x\in X$，下面所列的数就是 $f(x)$。注意到 1 变为 3，3 变为 4，4 又变回为 1，形成一个循环；同时 2 变为 5，5 又变回为 2 也形成一个循环。表示上述置换的第二种形式是：

$$f=(1,3,4)(2,5)$$

一种特殊的置换是不变，我们记为 e，即

$$e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}=(1)(2)(3)(4)(5)$$

容易看出，每个置换都有逆元素，如 f 的逆元素为

$$f^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

或

$$f^{-1}=(143)(25)$$

设 X 的另一个置换 g 定义如下：

$$g=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

或写成另一种形式：

$$g=(1,\ 2,\ 5,\ 3)\,(4)$$

通常省略不变的元素，g 也可写成：

$$g=(1,\ 2,\ 5,\ 3)$$

它们的乘积为

$$fg=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}=(1,\ 5,\ 4)$$

$$gf=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5\end{pmatrix}=(2,\ 3,\ 4)$$

注意到两者是不同的。

可以验证，集合 X 的所有置换在上述乘积运算下构成一个群，其单位元为 e，这个群称为 X 的对称群，记为 Symm(X)。

由排列组合理论可知，若 X 有 n 个元素，则 Symm(X) 中包含 $n!$ 个不同的置换。

2. 应用举例—多变的教堂钟声

多变的教堂钟声技巧是英国独有的，像英国的其他特色传统一样，世界上其他地方的人是很难理解这种变化的。例如，比利时的音乐家就认为，英国教堂的钟声好像是用钟演奏的

事先仔细构思好的乐曲。而从英国教堂钟楼的敲钟人来看，这不过是适合于外国人玩的儿戏。这种技巧大约形成于公元十世纪，今天仍为英国国内数以千计的教堂所延续。挂在教堂钟楼上通常有一组钟，从六只到十二只多少不等。敲钟时，敲钟人依某种次序用绳索拉动钟锤敲响各钟。钟体通常非常沉重，钟声的长短不易改变，因而敲钟的次序有一些特殊的要求。例如，设想有八只钟第一轮按下面的序列依次敲响：

1，2，3，4，5，6，7，8

到下一个轮回时，人们可以改变上述序列中某些相邻钟的位置，例如变为按下面的序列敲响各钟：

1，3，2，4，5，7，6，8

也可以按

1，2，4，3，6，5，8，7

敲响各钟。但是不能按下面的序列敲响各钟：

3，2，1，4，5，6，7，8，

即转到下个轮回时，序列中各钟的次序不允许移动两个或两个以上的位置。如果我们依次一行一行地把各轮回的钟声次序记录下来，则每一行都是一个由 1~8 八个数字组成的序列，并且前后两行相比较，序列中每个数字最多移动一位。不同的敲钟方法变成下面的要求：除了最初的一行与最后一行相同以外，其余各行序列互不相同。对只有四只钟的情况，有一种称为“Plain Bob”的敲钟方法可用下面表（1）列出：

Plain Bob

1	2	3	4
2	1	4	3
2	4	1	3
4	2	3	1
4	3	2	1
3	4	1	2
3	1	4	2
1	3	2	4
1	3	4	2
3	1	2	4
3	2	1	4
2	3	4	1
2	4	3	1
4	2	1	3
4	1	2	3
1	4	3	2
1	4	2	3
4	1	3	2
4	3	1	2
3	4	2	1
3	2	4	1
2	3	1	4
2	1	3	4
1	2	4	3
1	2	3	4

表（1）

置换	敲钟次序				置换
	1	2	3	4	(1,2)(3,4)
(2,3)	2	1	4	3	
	2	4	1	3	(1,2)(3,4)
(2,3)	4	2	3	1	
	4	3	2	1	(1,2)(3,4)
(2,3)	3	4	1	2	
	3	1	4	2	(1,2)(3,4)
(3,4)	1	3	2	4	
	1	3	4	2	(1,2)(3,4)
(2,3)	3	1	2	4	
	3	2	1	4	(1,2)(3,4)
(2,3)	2	3	4	1	
	2	4	3	1	(1,2)(3,4)
(2,3)	4	2	1	3	
	4	1	2	3	(1,2)(3,4)
(3,4)	1	4	3	2	
	1	4	2	3	(1,2)(3,4)
(2,3)	4	1	3	2	
	4	3	1	2	(1,2)(3,4)
(2,3)	3	4	2	1	
	3	2	4	1	(1,2)(3,4)
(2,3)	2	3	1	4	
	2	1	3	4	(1,2)(3,4)
(3,4)	1	2	4	3	
	1	2	3	4	

表（2）

这其实是 4 个元素的对称群S_4。在表（1）中，除首尾相同外，S_4中的 24 个元素每个在表中都出现一次且只出现一次。我们用表（2）说明表（1）的构造方法。首先交替地应用（1,2）（3,4）和(1)(2,3)(4)这两种置换，直到得到一行 1 3 2 4。此时，再实施置换(1)(2,3)(4)后要回到开始的一行。为避免重复，我们转而应用置换(1)(2)(3,4)。然后我们再进行交替地

应用（1,2）（3,4）和(1)(2,3)(4)这两种置换。到 1243 这一行又碰到相同的问题，转而应用置换(1)(2)(3,4)。当我们走遍 S_4 的每个元素后，我们就回到起点。

练习与思考

1. 试将下面的置换改写成另一种形式：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 6 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

2. 试将下面的置换改写成另一种形式：

$$(1,3)(2,4,5); \quad (1,3,5)(2,4,6,7)$$

3. 将上面两题中两个置换分别按不同次序相乘（第一个置换与第一个置换相乘，第二个置换与第二个置换相乘），各得怎样的置换？注意次序不同，结果是否相同？

4. 设钟的数目为 n。如果交替地应用下面两种置换，应用多少次后会回到开始的次序？

$$a = (1,2)(3,4)(5,6)\ldots$$
$$b = (1)(2,3)(4,5)\ldots$$

[提示：对 n 为奇数和偶数的情况分别讨论]

5. 若有六只不同的钟，试设计一种符合要求的敲钟次序。

4. 12 音体系音乐

1923 年，勋伯格发明了 12 音作曲法，这是对调性音乐的突破。12 音法的基础是音列。在一个音列中，所有半音阶中的 12 个音都被使用到，而且每个只用一次。这 12 个音可以按作曲家选择的顺序，以一定的节奏或动力形态排列。音符可以同时出现或相继出现，并且允许相差八度的变化。12 个音的排列顺序一旦选定，作曲家就要把该音列作为其作品的基本音列完整地使用，可以对该音列作逆行、倒影、逆行倒影和提高或降低音程形式的变换，结合诸多音乐元素的变化，构思整个乐曲。分析这类音乐作品时，置换群理论是一种适合的工具。下面我们以勋伯格的《钢琴协奏曲》，作品 42（1942），为例说明 12 音法中音列及其变换。

该曲的基本音列为

$$E^{\flat}, B^{\flat}, D, F, E, C, F^{\sharp}, A^{\flat}, D^{\flat}, A, B, G.$$

令 $E^{\flat} \equiv 0$ ，上述音列可以用数列

$$S = (0,\ 7,\ 11,\ 2,\ 1,\ 9,\ 3,\ 5,\ 10,\ 6,\ 8,\ 4)$$

表示。

(1). **逆行变换** 对音列 S 作逆行变换 R，是指将 S 中的各音由后向前重新排列。记对音列 S 作逆行变换后得到的音列为 $\mathrm{R}(S)$，则

$$\mathrm{R}(S)=(4,8,6,10,5,3,9,1,2,11,7,0)$$

(2). **倒影变换** 对音列 S 作倒影变换，应先选择音列的某个音作为基准；在倒影列中基准音保持不变；其余各位置上的音作如下变化：若比基准音高（或低）n 个半音，则在倒影列中这个位置上用比基准音低（或高）n 个半音的音代替。上例中，如以 E^{b}（音列的第一个音）作为基准，并记该音列 S 的倒影变换列为 $\mathrm{I}_1(S)$，则

$$\mathrm{I}_1(S)=(0,5,1,10,11,3,\ 9,7,2,6,4,8)$$

如果以音列的第二个音 B^{b}（对应 7）作为基准对该音列 S 作倒影变换，记得到的音列为 $\mathrm{I}_2(S)$，则

$$\mathrm{I}_2(S)=（2，7，3，0，1，5，11，9，4，8，6，10）$$

计算 $\mathrm{I}_2(S)$ 的方法如下：$\mathrm{I}_2(S)$ 中的第 k 个位置上的数等于用 2 倍的 7 减去 S 中的第 k 个位置上的数。类似地可以计算 $\mathrm{I}_k(S)$，即以 S 音列中的第 k 个音为基准对 S 作倒影变换所得的音列：$\mathrm{I}_k(S)$ 中的第 i 个位置上的数等于 S 中的第 k 个位置上的数的 2 倍减去 S 中的第 i 个位置上的数。一般地，若 $S=(s_1,s_2,\cdots,s_{12})$，记 $\mathrm{I}_k(S)=(a_1,a_2,\cdots,a_{12})$，则用公式可表示 S 和 $\mathrm{I}_k(S)$ 中各音的关系为：

$$a_i\equiv 2s_k-s_i(\mathrm{mod}12)$$

用这种方法可得到 12 个音列：$\mathrm{I}_1(S)$，$\mathrm{I}_2(S)$，$\mathrm{I}_3(S)$，……，$\mathrm{I}_{12}(S)$。

（3）. **逆行倒影变换** 对音列 S 作逆行倒影（以第一个音为基准）是接连对 S 作逆行变换和倒影变换（两种变换的顺序不影响结果）。记对上例中的 S 作逆行倒影（以第一个音为基准）后得到的音列为 $\mathrm{C}(S)$，则

$$\mathrm{C}(S)=(8,4,6,2,7,9,3,11,10,1,5,0)$$

（4）**增高或降低音程**　将音列 S 中每个音提高相同的音程。例如对 S 提高 2 个半音，记得到的音列为 $\mathrm{P}_2(S)$，则

$$\mathrm{P}_2(S)=(2,9,1,4,3,11,5,7,0,8,10,6)$$

我们也可以将音列 S 中每个音提高 k 个半音，记得到的音列为 $\mathrm{P}_k(S)$，这样可得到 12 个不同的音列：S，$\mathrm{P}_1(S)$，$\mathrm{P}_2(S)$，……，$\mathrm{P}_{11}(S)$。

从上述四类变换出发，形成了一个变换群 $\boldsymbol{H}$。用群 $\boldsymbol{H}$ 中的变换对音列 S 作变换，则可能得到 48 个不同的音列。总数 48 可以这样计算得到：有 12 个不同的 $\mathrm{P}_k(S)$，以 $\mathrm{I}_1(S)$ 为基础，又可作 12 个增高音程列 $\mathrm{P}_k(\mathrm{I}_1(S))$，共有 24 个；每个又可以用逆行变换得到另外 24 个。我们可以用下表来表示基本音列 S 在 $\boldsymbol{H}$ 中的变换下所得到的 48 个音列：

0	7	11	2	1	9	3	5	10	6	8	4
5	0	4	7	6	2	8	10	3	11	1	9
1	8	0	3	2	10	4	6	11	7	9	5
10	5	9	0	11	7	1	3	8	4	6	2
11	6	10	1	0	8	2	4	9	5	7	3
3	10	2	5	4	0	6	8	1	9	11	7
9	4	8	11	10	6	0	2	7	3	5	1
7	2	6	9	8	4	10	0	5	1	3	11
2	9	1	4	3	11	5	7	0	8	10	6
6	1	5	8	7	3	9	11	4	0	2	10
4	11	3	6	5	1	7	9	2	10	0	8
8	3	7	10	9	5	11	1	6	2	4	0

这里第一行为基本音调行，第一列为基本音列关于 0 的倒影。第二行为基本音调行每个音增高 5 个半音，这里 5 是该行的第一个数；第三行为基本音调行每个音增高 1 个半音，这里 1 是该行的第一个数；……；第 12 行为基本音调行每个音增高 8 个半音，这里 8 是该行的第一个数。如果记 $=(s_1,s_2,\cdots,s_{12})$，则上述表中第 i 行、第 j 列的数可以表示为

若第1行，第1列，不是0，而是a，
则第i行，第j列为：$a+s_j-s_i \bmod 12$.

$$s_j-s_i(\mathrm{mod}12)$$

由 S 经 $\boldsymbol{H}$ 中的变换所得的 48 个音列可以从表中一一读出：每一行从左到右和从右到左分别表示一个音列；每一列从上到下和从下到上也分别表示一个音列。因为有 12 行和 12 列，总共可从表中读出 48 个音列。

表中除第一列为基本音列关于 0 的倒影外，其余各列表示第一列增高若干个半音，由此也可以找到基本音列关于指定音的倒影。例如我们要找 S 关于 5 的倒影，先查出 5 在基本音列是第八个音，再看第八行，5 排在第九位。则第九列

（10，3，11，8，9，1，7，5，0，4，2，6）

就是基本音列 S 以 5（A^b）为基准的倒影。这样找到的音列中数字 5 的位置和它在基本音列中的位置相同，都排在第八位。

对某些具有对称性的音列，在经 H 中的变换所得到的 48 个音列中，可能有重复的出现。例如音列

K：**（0，2，7，5，10，9，3，4，11，1，8，6）**

对每个音增高 6 个半音阶后得到

$K1$：**（6，8，1，11，4，3，9，10，5，7，2，0）**

观察可知，$K1$ 恰恰是 K 的逆行。事实上，要判断一个音列是否具有某种对称性，只要对它作 H 内的所有变换并检验得到 48 的个音列是否不同，如果不同的音列少于 48 个，则该音列具有一定的对称性。

从理论上分析，可能的基本音列数目为 12!=479001600 个，即约为 4.7 亿个。在众多的音列中绝大多数在音乐中无法采用。对 12 音体系的音乐作品的研究说明，作曲家们常常选用的是一些具有某些对称性的音列作为他们作品的基本列。例如安东·韦伯恩的<室内交响曲>，作品 21，其基本音列为

（0，3，2，1，5，4，10，11，7，8，9，6）

此处 $F \equiv 0$ 。基本音列增 6 个半音后得

（6，9，8，7，11，10，4，5，1，2，3，0）

恰为基本音列的逆行。

又如韦伯恩的《九件乐器的协奏曲》，作品 24，基本音列为

Q：**（0，11，3，4，8，7，9，5，6，1，2，10）**

此处 $B \equiv 0$ 。将 Q 分成四组，各含 3 个音，分别为：

$Q1$：**（0，11，3）**　$Q2$：**（4，8，7）**　$Q3$：**（9，5，6）**　$Q4$：**（1，2，10）**

简记第一组为 T，T=**（0，11，3）**。对 T 作倒影，得 I(T)=（0,1,9）；T 的逆行 R(T)=（3，11，0）；对 R(T)作倒影，得 RI(T)=（9,1,0）；对 I(T)增高 1 个半音，得 $P_1(I(T))$ =（1，2，10）；对 R(T)增高 6 个半音，得 $P_6(R(T))$ =（9，5，6），对 RI(T) 增高 7 个半音，得 $P_7(RI(T))$ =（4，8，7）。比较 $Q1$、$Q2$、$Q3$、$Q4$ 和上述各音列，可以把 Q 写成

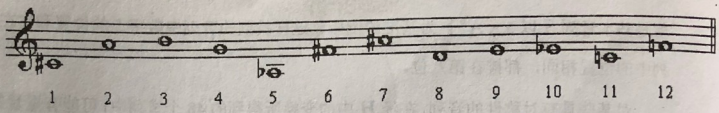
$$Q=（T，P_7(RI(T))，P_6(R(T))，P_1(I(T))）$$

即 Q 事实上可由 T（三个音）通过 H 中的变换生成。

如果把一个音列经 H 中的变换所生成的音列看作同一类，利用置换群理论可以证明，共有 9985920 个不同的类，具有一定对称性的类只有 13440 个，占总数的 0.23%。

练习与思考

勋伯格的《钢琴曲五首》，作品 23，最后一首的旋律与和弦来自下面的音列 T：



（1）以 $B \equiv 0$ 求出对应数列；

（2）写出表示用 **H** 中的变换得到的 48 个音列的表；

（3）在表中写出下面的音列：$R(T)$，$I_7(T)$，$RI(T)$，$P_1(I(T))$，$P_6(R(T))$，并以相应的音序列表示。

R 逆行.

I_7：以第7个音为基准作倒影

P_1：向上移一个半音.

先逆行T，再升高6个半音

第三章　数字音乐中的数学

§1. 数字化声音信号
§2。取样、还原和减少失真方法的数学原理
§3. 取样速率和 Nyquist 定理
§4. Z 变换
§5. 离散 Fourier 变换
§6. 快速 Fourier 变换

已有知识

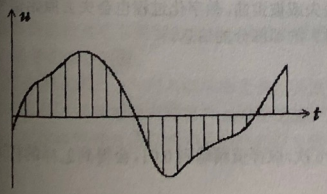
- 一个单纯的音（例如由音叉发出的音）的波形是一个周期波；其波形总可以分解为幅度不同、频率不同的各种谐波成分，每个谐波的频率是基波的某整数倍；其所有谐波的频率及幅度组成该音的频谱表；
- 对任何周期函数都可以按 Fourier 公式展开为一个三角级数，可以按公式计算级数中每项的系数；
- 对任何非周期的函数，可以用 Fourier 积分变换作频谱分析：按公式计算象函数，象函数的自变量是频率，函数值的绝对值可表示原始函数中对应频率成分的幅值；由此，每个非周期的函数可以看作由一切频率成分（各频率成分的幅度不同）合成；
- RC 线路具有平滑波形的作用：即若输入一个脉冲信号，输出的信号将呈连续单调的指数曲线形式；

§1. 数字化声音信号

实际的声音信号是时间的连续函数。确切地说，声音的声压或声强的幅度随时间而连续地变化，表示时间和幅度关系的图形是一条连续曲线。这里，时间可以取一个区间内的任何数，而对应的幅度值也不限于整数或有限位的小数。

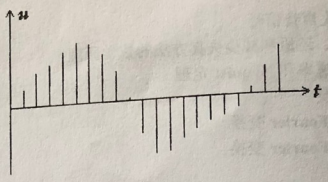
数字化声音信号的第一步是取样，即以极快的速率测出信号的幅度，并用有限位的数字记录每次测得的结果。当测量的速率足够快时，测量的数据同时也保留了声音频率的信息。例如 CD 取样的速率为 44.1KHz，即每秒测量声音信号 44100 次，每次测量的结果用一个 16 位二进制的数表示。这样，取样得到的数据是一个随时间而变化的数列。计算机记录、加工、传输声音信号时的对象就是这种具有固定长度、表示为 0 或 1 形式数字的数列。

下面我们用图来说明取样的过程：



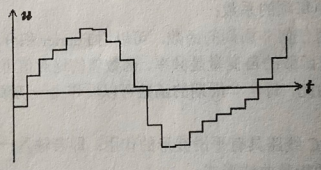
左图中曲线是某个原始声音信号的波形。在相等的时间间隔内测量信号的幅度，就得到样本数列，即按时间的先后排列的测量值。其图像如下

图所示：

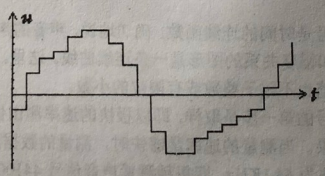


样本数列也可以看作一个定义在取样时间区间上的函数：该函数在测量时刻取测得的幅度、其余时刻为 0。

由取样序列再现原始信号的方法有多种。把离散点上的函数值拓展为整个时间区间上的函数，是数学中的插值问题。通常的插值方法有：常数插值、线性插值、梯形插值等等。例如，常数插值方法是假设两次取样之间的时间间隔内信号强度不变，得到在整个取样期间内样本信号的曲线为：



由于信号幅度只可能用有限位的二进制数字表示（一定的精确度），每次测得的信号幅度将使用类似于十进制的“四舍五入”方法用最接近的 16 位的二进制数代替。这个过程有时也称为“数字化过程”。最终得到的样本信号曲线如下



由取样过程可知，样本信号曲线不同于原始信号的波形曲线，声音数字化的过程将不可避免地会丢失原始信号的一些信息。例如，若原始信号中含有比取样速率更高频率成分，这部分的信息会在数字化的过程中将会被丢失或被歪曲。数字化过程也会失去原始信号中幅度很小（当幅度小于“四舍五入”的尺度时）的那部分的信息。

练习与思考

1. 对信号 $\cos(\pi t)$ 按每秒取样 6 次，取样值精确到 0.01，会得到怎样的样本序列？

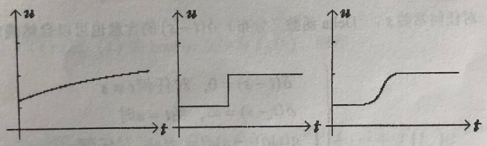
将取样结果列表并用描点法以图形表示出来。

2. 若将上述信号序列按两次取样之间的时间间隔内信号强度不变，用函数的插值方法，得到什么函数？画出该函数的图形。

§2. 取样、还原和减少失真方法的数学原理

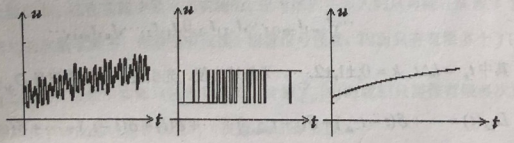
高频振荡是减少信号数字化过程中小幅度成分失真的一种方法。其原理是：用一个适当振幅的随机高频信号和原始信号比较以提高信号的分辨能力。当取样的频率远高于原始信号的频率时，这种效果尤其明显。我们下面用一个变化非常缓慢的原始信号来说明其原理。

图中假设原始信号为一平滑上升的曲线，经数字化后得到一个分段函数，该分段函数有一个跳跃。经过适当的电子线路（例如 RC 线路）处理后恢复为一个平滑的函数。但是从图中可以看到，该函数和原始信号有很大的差别。



原始信号　　数字化后的信号　　光滑化后的信号

当用一个适当振幅的随机高频信号和原始信号比较并数字化处理后，得到一个有许多跳跃（或脉冲）的分段函数，经同样的电子线路处理后信号恢复为一个平滑的函数。从图中可以看到，该函数和原始信号差别较小。



加高频扰动后的输入信号　　数字化后的信号　　光滑化后的信号

练习与思考

对图像的处理也有类似的方法：试观察报纸上的黑白照片，可以发现照片由许多小黑点组成。试考虑如下问题：

1. 小黑点的大小与照片的清晰度有何关系？
2. 这种方法是如何表现照片上的明暗的？
3. 试比较这种方法与利用高频扰动减少信号失真方法的相同处。

§ 3. 取样速率和 Nyquist 定理

我们用一个函数 $u = f(t)$ 表示原始信号的波形，用 Delta 函数（分布）$\delta(t)$ 表示取样的过程。Delta 函数 $\delta(t)$ 的主要特性如下：

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, \text{ 对任何} t \neq 0 \\ \delta(0) = \infty \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t)dt = g(0), \text{ 对任何} g(t) \end{cases}$$

为简单计，我们可以把 $g(t)\delta(t)$ 理解为在 $t = 0$ 取值为 $g(0)$、其它点处取值为 0 的普通函数。对任何常数 s， Delta 函数（分布）$\delta(t-s)$ 的含意也可以自然确定，即

$$\begin{cases} \delta(t-s) = 0, \text{ 对任何} t \neq s \\ \delta(t-s) = \infty, \text{ 当} t = s \text{时} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-s)dt = g(s), \text{ 对任何} g(t) \end{cases}$$

同样可把 $g(t)\delta(t-s)$ 理解成自变量为 t 的一个普通函数（s 是常数），该函数除 $t = s$ 时等于 $g(s)$ 外处处为 0。

现在假设取样的时间间隔为 Δt，即每秒取样 $\dfrac{1}{\Delta t} = N$ 次，取样时刻依次为

$$\cdots, t_{-m}, t_{-m+1}, \cdots, t_{-2}, t_{-1}, 0, t_1, t_2, \cdots, t_n, t_{n+1}, \cdots$$

其中 $t_k = k\Delta t$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$。为叙述方便，先引进一个函数记号 $D_{\Delta t}(t)$ 如下：

$$D_{\Delta t}(t) = \cdots + \delta(t - t_{-m}) + \delta(t - t_{-m+1}) + \cdots + \delta(t) + \delta(t - t_1) + \cdots + \delta(t - t_n) + \delta(t - t_{n+1}) + \cdots$$

$D_{\Delta t}(t)$ 可以简记为

$$D_{\Delta t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_n)$$

根据上述 $g(t)\delta(t-s)$ 的含意，对任何信号函数 $u = f(t)$，取样的过程可以用取样函数 $f(t)D_{\Delta t}(t)$ 表示：事实上，按 $\delta(t-s)$ 的含意，只有当 $t = t_k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时

$f(t)D_{\Delta t}(t)$ 等于 $f(t_k)$，其余时刻都等于 0；这也就是样本数列的本来含意。

我们已经知道，可以应用 Fourier 变换对一个信号作频谱分析，那么对取样函数 $f(t)D_{\Delta t}(t)$ 作 Fourier 变换能得到什么结果？对取样函数 $f(t)D_{\Delta t}(t)$ 的 Fourier 变换最终能帮助我们分析出原始信号函数 $u=f(t)$ 中的各成分吗？

为此，我们先推导对 Delta 函数 $\delta(t-s)$ 的 Fourier 变换公式。由 $\delta(t-s)$ 的定义和 Fourier 变换的公式

$$\hat{g}(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi\nu ti}\,dt\ ,$$

得到 $\delta(t-s)$ 的 Fourier 变换为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-s)e^{-2\pi\nu ti}\,dt=e^{-2\pi\nu si}$$

这样，若记 $f(t)D_{\Delta t}(t)$ 的 Fourier 变换为 $\hat{f}_D(\nu)$，则有

$$\hat{f}_D(\nu)$$

$$=\cdots+f(t_{-m})e^{-2\pi\nu t_{-m}i}+\cdots+f(0)+f(t_1)e^{-2\pi\nu t_1 i}+\cdots+f(t_n)e^{-2\pi\nu t_n i}+\cdots$$

或写成简洁的形式

$$\hat{f}_D(\nu)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t_n)e^{-2\pi\nu t_n i}$$

这就是说，为计算取样函数 $f(t)D_{\Delta t}(t)$ 中频率为 ν 的“幅值” $\hat{f}_D(\nu)$，按公式应计算一个无穷级数的和，这在实践中是很难实施的。但考虑到实际人们只可能在有限多个时刻（虽然测量信号的次数非常多，但总是有限次）测量信号强度，因而只有有限多个 $f(t_n)$ 不等于 0。于是上述无穷级数中实际只包含有限项，计算 $\hat{f}_D(\nu)$ 时我们只需作有限多次加法。我们将在本章第六节详细地讨论计算技巧（快速 Fourier 变换）。

由 Fourier 变换理论，我们还可以得到 $f(t)D_{\Delta t}(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}_D(\nu)$ 的另一种表达式：

$$\hat{f}_D(\nu)=\frac{1}{\Delta t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(\nu-\frac{t_n}{(\Delta t)^2}\right)$$

其中 $\hat{f}(\nu)$ 表示原始信号函数 $f(t)$ 的 Fourier 变换。

利用记号 $\frac{1}{\Delta t}=N$ 及 $t_n=n\Delta t$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，上述表达式也可写成

$$\hat{f}_D(\nu)=N\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(\nu-nN\right) \qquad (1)$$

为分析方便，我们将上述等式无穷级数具体写出

$$\begin{aligned}&\cdots+\hat{f}(\nu+mN)+\hat{f}(\nu+(m-1)N)+\cdots+\hat{f}(\nu+N)+\hat{f}(\nu)\\&+\hat{f}(\nu-N)+\hat{f}(\nu-2N)+\cdots+\hat{f}(\nu-nN)+\cdots\end{aligned}$$

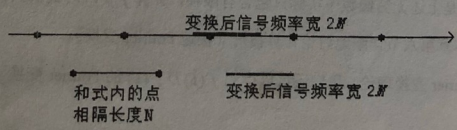
现固定 ν。公式（1）表示，为求 $\hat{f}_D(\nu)$ 的值，应在表示频率的轴上以 ν 为起点向两边以 N 的间距取点，求 $\hat{f}(\nu)$ 在各点的值并相加，将结果乘以 N 即得 $\hat{f}_D(\nu)$ 的值。由此可观察到：当 ν 向左或向右移动距离 N 变成 $\nu\pm N$ 时，$\hat{f}_D(\nu\pm N)$ 是同样一些数相加，因而 $\hat{f}_D(\nu)$ 是一个周期函数，周期为 N。

我们现在研究一种重要的特殊情况：设原始信号 $f(t)$ 只含有一定频宽的频率成分。不妨设各成分的频率在 0~M 之间。 由于一个实数值函数经 Fourier 变换后得到的是一个自变量为 ν、定义域为 $(-\infty,\infty)$ 的取复数值的函数，其实部和虚部分别为自变量为 ν 的偶函数和奇函数。因此，从原始信号 $f(t)$ 具有有限频宽（0~M）的假设可推知，$f(t)$ 的经 Fourier 变换后的函数 $\hat{f}(\nu)$ 在频率在 $-M$~ M 之外的各成分为零，即

$$当|\nu|>M 时 \quad \hat{f}(\nu)=0$$

此时，对任何 ν，在计算 $\hat{f}_D(\nu)$ 的和式表达式中也只有有限多项不等于零。 特别当 $N>2M$ 时，上述和式中只含有和式中对应于 $n=0$ 的一项，即此时应有

$$\hat{f}_D(\nu)=N\hat{f}(\nu)$$



即样本的 Fourier 变换 $\hat{f}_D(\nu)$ 与原始信号的 Fourier 变换 $\hat{f}(\nu)$ 在各频率上的值成比例。

上述论证说明，当取样速率 N 大于两倍原始信号频率范围（M）时，在原始信号频率范围内样本能精确地重现原始信号各成分。上述结论在实践中有重大意义。该结论常被表述为说明取样速率和原始信号频率之间关系的 **Nyquist 定理**：

范围在[SR/2, SR]混叠失真的频率变为f': (SR sample rate 取样率).
$f' = |f - SR|$

Nyquist 定理

在信号数字化可以不失真地表示的原始信号各成分中，最高的频率为取样速率的二分之一。

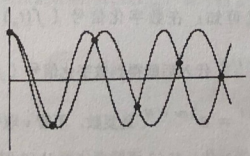
为叙述方便，我们称取样速率的二分之一为 **Nyquist 频率**。由 Nyquist 定理可以推出，如果原始信号只含有频率小于 Nyquist 频率的谐波，即不含有频率高于 Nyquist 频率的谐波，则由样本可以完全重现原始信号。在实践中，由于人的听觉只限于频率不大于 20KHz 的声波，我们可以先将原始声波中频率高于 20KHz 的部分用低通滤波器滤去，再用大于 40Hz 的速率取样，这样就能保证由样本能够重现原始声波。

当原始信号含有频率大于 Nyquist 频率的成分时会发生什么情况呢？下面的分析将说明：由样本重现原始信号时可能会使信号中低于 Nyquist 频率的成分发生畸变。

我们以原始信号 $f(t) = A\cos(2\pi\nu t)$ 为例。仍同上面的记号，用 N 表示取样速率，即每秒取样的次数。 在第 M 个取样点，样本值为 $f(M/N) = A\cos(2\pi\nu M/N)$。现假设原始信号频率 ν 大于 Nyquist 频率 $N/2$。设 $\nu = N/2 + \beta$ $(\beta. > 0)$。有

$$
\begin{aligned}
f(M/N) &= A\cos[2\pi(N/2+\beta)M/N] \\
&= A\cos(M\pi + 2\beta M\pi/N) \\
&= (-1)^M A\cos(2\beta M\pi/N)
\end{aligned}
$$

改变 β 的符号对计算输出信号的强度没有区别。这就是说，对一个频率低于 Nyquist 频率的原始信号（$\nu = N/2 - \beta$）和对另一个频率高于 Nyquist 频率（$\nu = N/2 + \beta$）的原始信号用同一个频率取样，将得到的同样的样本值 $|f(M/N)|$。这样，如果原始波形中包含了频率分别为 $\nu = N/2 + \beta$（频率高于 Nyquist 频率）和 $\nu = N/2 - \beta$（频率低于 Nyquist 频率）两个不同部分的成分，则我们无法由样本序列判断是来自原始信号中何种成分。从下面的图中也可以理解这个结论。



上图中两条曲线分别是函数 $A\cos[2(N/2+\beta)\pi t]$ 和函数 $A\cos[2(N/2-\beta)\pi t]$ 的图象。而取样点恰恰对应两函数曲线相交的点（这些点相邻两点横座标的差是一个常数 N）。由这样的样本值我们将无法判断原始信号的频率究竟是 $\nu = N/2 - \beta$ 还是 $\nu = N/2 + \beta$。

这种高于 Nyquist 频率的成分将使低于 Nyquist 频率的成分畸变的现象称为**混叠失真**。

练习与思考

1. 对 N=200，v=99 和 v=101 计算对 $f(t) = A\cos(2\pi vt)$ 观察取样序列的值，找出之间的关系。
2. 如果取样速率为 441KHz，能完全重现的信号的频率在什么范围？
3. 由取样速率是 220KHz 的样本系列重现原始信号时，是否含有 440KHz 部分的成分？
4. 使两个信号 $A\cos(\alpha\pi t)$ 和 $A\cos(\beta\pi t)$ 绝对值相等的 t 满足什么规律？

§4. Z 变换

在 $f(t)D_{\Delta t}(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}_D(v)$ 的表达式中

$$\hat{f}_D(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n)e^{-2\pi v\, t_n i}$$

以 $t_n = n\Delta t$，$n = 0,\pm1,\pm2,\cdots$ 代入，得

$$\hat{f}_D(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n)e^{-n(2\pi v\Delta t i)}$$

若以 z 记 $e^{2\pi v\Delta t i} = e^{2\pi v\, i/N}$，上式右边变成

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n)z^{-n}$$

形式上这是一个关于 z 的无穷级数，称为**数字化信号 $\{f(t_n)\}$ 的 z 变换**，记为 $F(z)$。

由 z 变换的定义可知：在数字化信号 $\{f(t_n)\}$ 的 z 变换 $F(z)$ 的公式中用 $z = e^{2\pi v\Delta t i} = e^{2\pi v\, i/N}$ 代入后就得到数字化信号 $\{f(t_n)\}$ 的 Fourier 变换。

注意到 $z = e^{2\pi v\Delta t i} = e^{2\pi v\, i/N}$ 是复数，不管 v 取什么实数，总有 $|z|=1$，即在复平面上 z 总在单位圆上。当 v 从 $-N/2$ 连续变化到 $N/2$ 时，对应的 z 取遍单位圆周上的点，并重合于 $z=-1$。理论上，上述级数一般不收敛（例如对一个不变的信号）。但是若 $n<0$ 时 $f(t_n)=0$，且 $f(t_n)$ 恒有界时，则对 $|z|<1$ 无穷级数恒收敛。但在实践中，人们

并不关心该级数的收敛性问题。这是由于实践中仅可能有限次测量信号，序列｛$f(t_n)$｝内只包含有限多项，因而上述级数也只对有限项求和；更重要的是，人们需要 z 变换的本质原因是因为它给数字信号许多理论问题的研究带来极大的便利。

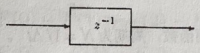
例如，信号测量延迟了一个周期，即原信号在t_{n-1}时刻的值都延迟为t_n时刻的值；则延迟后信号序列的 z 变换为

$$F(v)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_{n-1})z^{-n}$$

将t_{n-1}记为 t_k，上式可改写为

$$F(v)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_{n-1})z^{-n}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k)z^{-(k+1)}=z^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k)z^{-k}$$

说明信号延迟一个周期后，延迟信号的 z 变换等于原信号的 z 变换乘以z^{-1}。文献中常用下面的框图表示：



对反馈、放大、耦合等系统，也可用相应的框图和公式来表示。这类方法在实践中对分析、研究、设计都带来了极大的便利。

练习与思考

1. 对信号$\{\cdots,0,0,1,1/2,1/3,\cdots,1/n,\cdots\}$写出对应的 z 变换。其中数字 1 对应的时刻为$t_1$。

2. 若上述信号数字 1 对应的时刻为t_2或t_{100}，信号的 z 变换会如何变化？

§5. 离散 Fourier 变换

前面已定义取样函数如下：

$$D_{\Delta t}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-t_n)$$

从理论上说，取样的样本点可以是无限多个；而在实践中，取样只可能是有限多次。当上述级数只含有限多项时，实际计算量可以大大减少。现在研究，当信号的长度为 M 时（编号依次为 0,1,……，$M-1$），在求信号函数 $f(t)$ 的样本序列 $f(t)D_{\Delta t}(t)$ 的 Fourier 变换时如何简化计算？

对 $n\geq M$ 时定义 $f(t_n)=0$，按前面的表达式，$f(t)D_{\Delta t}(t)$ 的 Fourier 变换为

$$\hat{f}_D(\nu)=\sum_{n=0}^{M-1}f(t_n)e^{-2\pi\nu n\Delta t i}$$

该函数为变量 ν 的周期函数，周期为 $N=1/\Delta t$ 。

由于 $\{f(t_n)\}$ 仅有 M 个数据，是否可以从对应于 M 个不同 ν 的 $\hat{f}_D(\nu)$ 的值重新求得 $\{f(t_n)\}$ 呢？假设我们将 M 个不同 ν 对应的 z 均匀地分布在复平面的单位圆周上。为此可取 $\nu_k=k/(M\Delta t)$，$0\leq k<M$，并将对应的 $F(\nu_k)$ 简记为 $F(k)$ 。有

$$F(k)=\sum_{n=0}^{M-1}f(n\Delta t)e^{-2\pi nki/M}$$

我们下面说明，$\{f(t_n)\}$ 可以由 $\{F(k)\}$ 表示出来。

和三角函数的正交性类似，我们要利用集合 $\{e^{2\pi kni/M},n=0,\cdots,M-1\}$ 的如下性质：

$$\sum_{n=0}^{M-1}e^{2\pi nki/M}=\begin{cases}M, & \text{如果 } M \text{ 能被 } k \text{ 整除}\\ 0, & \text{其他情况}\end{cases}$$

由此，可得

$$f(n\Delta t)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}F(k)e^{2\pi nki/M} \qquad (1)$$

〔例〕取 M=4。在复平面单位圆上均匀分布的四个点依次为

$$
\begin{aligned}
e^{0} &= 1 && (k=0)\\
e^{2\pi i/4} &= i && (k=1)\\
e^{4\pi i/4} &= -1 && (k=2)\\
e^{6\pi i/4} &= -i && (k=3)
\end{aligned}
$$

上述公式具体写出如下：

$$
\begin{aligned}
F(0) &= f(0)+f(\Delta t)+f(2\Delta t)+f(3\Delta t)\\
F(1) &= f(0)-if(\Delta t)-f(2\Delta t)+if(3\Delta t)\\
F(2) &= f(0)-f(\Delta t)+f(2\Delta t)-f(3\Delta t)\\
F(3) &= f(0)+if(\Delta t)-f(2\Delta t)-if(3\Delta t)
\end{aligned}
$$

以 $F(k)$ 的值表示 $f(t_n)$，得

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \tfrac{1}{4}(F(0)+F(1)+F(2)+F(3))\\
f(\Delta t) &= \tfrac{1}{4}(F(0)+iF(1)-F(2)-iF(3))\\
f(2\Delta t) &= \tfrac{1}{4}(F(0)-F(1)+F(2)-F(3))\\
f(3\Delta t) &= \tfrac{1}{4}(F(0)-iF(1)-F(2)+iF(3)).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

在实际应用计算机时，通常取 M 为 2 的整数幂是比较方便的。

练习与思考

1. 利用下面的提示证明公式（1）：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}F(k)e^{2\pi ink/M} &= \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\left(\sum_{m=0}^{M-1}f(m\Delta t)e^{-2\pi imk/M}\right)e^{2\pi ink/M}\\
&= \sum_{m=0}^{M-1}f(m\Delta t)\left(\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}e^{2\pi i(n-m)k/M}\right).
\end{aligned}
$$

2. 具体推导由 $F(\nu)$ 的值表示 $f(t_n)$ 的公式（2）。

§ 6. 快速 Fourier 变换

快速 Fourier 变换是一种算法，可以使有限信号序列的 Fourier 变换的计算次数大大减少。

设 M 是一个偶数。在 $F(k)$表达式的和式中按偶数项和奇数项分别合并，改写为如下的形式：

$$F(k)=\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} f(2n\Delta t)e^{-2\pi i(2n)k/M}+\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} f((2n+1)\Delta t)e^{-2\pi i(2n+1)k/M}.$$

注意 $F(k+\dfrac{M}{2})$ 的表达式和 $F(k)$表达式非常相似，并且应用公式 $e^{-\pi i(2n)k}=1$ 和公式 $e^{-\pi i(2n+1)k}=(-1)^k$，得到

$$F(k+\tfrac{M}{2})=\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} f(2n\Delta t)e^{-2\pi i(2n)k/M}$$
$$+(-1)^k\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} f((2n+1)\Delta t)e^{-2\pi i(2n+1)k/M}.$$

于是我们可以利用 $F(k)$和 $F(k+\dfrac{M}{2})$ 中两个相同的和式同时计算它们的值。

在前面 M=4 的例子中，可以得到

$$\begin{aligned}
F(0)&=(f(0)+f(2\Delta t))+(f(\Delta t)+f(3\Delta t))\\
F(2)&=(f(0)+f(2\Delta t))-(f(\Delta t)+f(3\Delta t))\\
F(1)&=(f(0)-f(2\Delta t))-i(f(\Delta t)-f(3\Delta t))\\
F(3)&=(f(0)-f(2\Delta t))+i(f(\Delta t)-f(3\Delta t)).
\end{aligned}$$

在实践中，通常取 M 为 2 的整数幂，当 M 是一个很大数时，这种减少计算次数的简化的意义重大。